

Juegos de elección múltiple

Francisco Sánchez Sánchez

Seminario de Matemáticas Aplicadas
Agosto 23, 2010

Motivación

- ▶ Construcción
- ▶ Distribución de costos compartidos
- ▶ Juegos de votación
- ▶ Empresa

Motivación

- ▶ Construcción
- ▶ Distribución de costos compartidos
- ▶ Juegos de votación
- ▶ Empresa

Motivación

- ▶ Construcción
- ▶ Distribución de costos compartidos
- ▶ Juegos de votación
- ▶ Empresa

Motivación

- ▶ Construcción
- ▶ Distribución de costos compartidos
- ▶ Juegos de votación
- ▶ Empresa

Notación y definiciones

Sean

- ▶ $N = \{1, \dots, n\}$ conjunto de jugadores.
- ▶ $m \in \mathbb{R}^N$ donde $m_i + 1$ es el número de niveles de participación del jugador i .
- ▶ $M_i = \{0, \dots, m_i\}$ conjunto de niveles de actividad del jugador i .
- ▶ $M = M_1 \times \dots \times M_n$ coaliciones.
- ▶ $m = (m_1, \dots, m_n)$ gran coalición.
- ▶ $M_i^+ = M_i \setminus \{0\}$.
- ▶ $M^+ = M \setminus \{0\}$.
- ▶ función característica $v : M \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $v(0) = 0$.

Notación y definiciones

Sean

- ▶ $N = \{1, \dots, n\}$ conjunto de jugadores.
- ▶ $m \in \mathbb{R}^N$ donde $m_i + 1$ es el número de niveles de participación del jugador i .
- ▶ $M_i = \{0, \dots, m_i\}$ conjunto de niveles de actividad del jugador i .
- ▶ $M = M_1 \times \dots \times M_n$ coaliciones.
- ▶ $m = (m_1, \dots, m_n)$ gran coalición.
- ▶ $M_i^+ = M_i \setminus \{0\}$.
- ▶ $M^+ = M \setminus \{0\}$.
- ▶ función característica $v : M \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $v(0) = 0$.

Notación y definiciones

Sean

- ▶ $N = \{1, \dots, n\}$ conjunto de jugadores.
- ▶ $m \in \mathbb{R}^N$ donde $m_i + 1$ es el número de niveles de participación del jugador i .
- ▶ $M_i = \{0, \dots, m_i\}$ conjunto de niveles de actividad del jugador i .
- ▶ $M = M_1 \times \dots \times M_n$ coaliciones.
- ▶ $m = (m_1, \dots, m_n)$ gran coalición.
- ▶ $M_i^+ = M_i \setminus \{0\}$.
- ▶ $M^+ = M \setminus \{0\}$.
- ▶ función característica $v : M \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $v(0) = 0$.

Notación y definiciones

Sean

- ▶ $N = \{1, \dots, n\}$ conjunto de jugadores.
- ▶ $m \in \mathbb{R}^N$ donde $m_i + 1$ es el número de niveles de participación del jugador i .
- ▶ $M_i = \{0, \dots, m_i\}$ conjunto de niveles de actividad del jugador i .
- ▶ $M = M_1 \times \dots \times M_n$ coaliciones.
- ▶ $m = (m_1, \dots, m_n)$ gran coalición.
- ▶ $M_i^+ = M_i \setminus \{0\}$.
- ▶ $M^+ = M \setminus \{0\}$.
- ▶ función característica $v : M \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $v(0) = 0$.

Notación y definiciones

Sean

- ▶ $N = \{1, \dots, n\}$ conjunto de jugadores.
- ▶ $m \in \mathbb{R}^N$ donde $m_i + 1$ es el número de niveles de participación del jugador i .
- ▶ $M_i = \{0, \dots, m_i\}$ conjunto de niveles de actividad del jugador i .
- ▶ $M = M_1 \times \dots \times M_n$ coaliciones.
- ▶ $m = (m_1, \dots, m_n)$ gran coalición.
- ▶ $M_i^+ = M_i \setminus \{0\}$.
- ▶ $M^+ = M \setminus \{0\}$.
- ▶ función característica $v : M \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $v(0) = 0$.

Notación y definiciones

Sean

- ▶ $N = \{1, \dots, n\}$ conjunto de jugadores.
- ▶ $m \in \mathbb{R}^N$ donde $m_i + 1$ es el número de niveles de participación del jugador i .
- ▶ $M_i = \{0, \dots, m_i\}$ conjunto de niveles de actividad del jugador i .
- ▶ $M = M_1 \times \dots \times M_n$ coaliciones.
- ▶ $m = (m_1, \dots, m_n)$ gran coalición.
- ▶ $M_i^+ = M_i \setminus \{0\}$.
- ▶ $M^+ = M \setminus \{0\}$.
- ▶ función característica $v : M \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $v(0) = 0$.

Notación y definiciones

Sean

- ▶ $N = \{1, \dots, n\}$ conjunto de jugadores.
- ▶ $m \in \mathbb{R}^N$ donde $m_i + 1$ es el número de niveles de participación del jugador i .
- ▶ $M_i = \{0, \dots, m_i\}$ conjunto de niveles de actividad del jugador i .
- ▶ $M = M_1 \times \dots \times M_n$ coaliciones.
- ▶ $m = (m_1, \dots, m_n)$ gran coalición.
- ▶ $M_i^+ = M_i \setminus \{0\}$.
- ▶ $M^+ = M \setminus \{0\}$.
- ▶ función característica $v : M \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $v(0) = 0$.

Notación y definiciones

Sean

- ▶ $N = \{1, \dots, n\}$ conjunto de jugadores.
- ▶ $m \in \mathbb{R}^N$ donde $m_i + 1$ es el número de niveles de participación del jugador i .
- ▶ $M_i = \{0, \dots, m_i\}$ conjunto de niveles de actividad del jugador i .
- ▶ $M = M_1 \times \dots \times M_n$ coaliciones.
- ▶ $m = (m_1, \dots, m_n)$ gran coalición.
- ▶ $M_i^+ = M_i \setminus \{0\}$.
- ▶ $M^+ = M \setminus \{0\}$.
- ▶ función característica $v : M \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $v(0) = 0$.

Notación y definiciones

Definición

Un juego de elecciones múltiples es una terna (N, m, v) donde N es un conjunto de jugadores, $m \in \mathbb{N}^N$ y $v : M \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $v(0) = 0$.

Notación y definiciones

Sean

- ▶ MC^N conjunto de juegos de elección múltiple.
- ▶ $P = \{(i, j) \mid i \in N, j \in M_i^+\}$.
- ▶ $x : P \rightarrow \mathbb{R}$ "vector de pagos", donde x_{ij} denota el incremento del pago del jugador i al cambiar su nivel de actividad de $j - 1$ a j . \mathbb{R}^P conjunto de vectores de pago.
- ▶ $x(s) = \sum_{i \in N} \sum_{j=1}^{s_i} x_{ij}$

Notación y definiciones

Sean

- ▶ MC^N conjunto de juegos de elección múltiple.
- ▶ $P = \{(i, j) | i \in N, j \in M_i^+\}$.
- ▶ $x : P \rightarrow \mathbb{R}$ "vector de pagos", donde x_{ij} denota el incremento del pago del jugador i al cambiar su nivel de actividad de $j - 1$ a j . \mathbb{R}^P conjunto de vectores de pago.
- ▶ $x(s) = \sum_{i \in N} \sum_{j=1}^{s_i} x_{ij}$

Notación y definiciones

Sean

- ▶ MC^N conjunto de juegos de elección múltiple.
- ▶ $P = \{(i, j) \mid i \in N, j \in M_i^+\}$.
- ▶ $x : P \rightarrow \mathbb{R}$ “vector de pagos”, donde x_{ij} denota el incremento del pago del jugador i al cambiar su nivel de actividad de $j - 1$ a j . \mathbb{R}^P conjunto de vectores de pago.

- ▶ $x(s) = \sum_{i \in N} \sum_{j=1}^{s_i} x_{ij}$

Notación y definiciones

Sean

- ▶ MC^N conjunto de juegos de elección múltiple.
- ▶ $P = \{(i, j) \mid i \in N, j \in M_i^+\}$.
- ▶ $x : P \rightarrow \mathbb{R}$ “vector de pagos”, donde x_{ij} denota el incremento del pago del jugador i al cambiar su nivel de actividad de $j - 1$ a j . \mathbb{R}^P conjunto de vectores de pago.
- ▶ $x(s) = \sum_{i \in N} \sum_{j=1}^{s_i} x_{ij}$

Notación y definiciones



Definición

Un juego $v \in MC^N$ se llama simple si y sólo si $v(s) \in \{0, 1\}$ para todo $s \in M^+$ y $v(m) = 1$.



Definición

Un juego $v \in MC^N$ se dice cero-normalizado si ningún jugador puede ganar algo jugando solo, es decir, $v(je^i) = 0$ para todo $i \in N$ y $j \in M_i$.

Notación y definiciones

► Definición

Un juego $v \in MC^N$ se llama simple si y sólo si $v(s) \in \{0, 1\}$ para todo $s \in M^+$ y $v(m) = 1$.



Definición

Un juego $v \in MC^N$ se dice cero-normalizado si ningún jugador puede ganar algo jugando solo, es decir, $v(je^i) = 0$ para todo $i \in N$ y $j \in M_i$.

Notación y definiciones

► Definición

Un juego $v \in MC^N$ se llama simple si y sólo si $v(s) \in \{0, 1\}$ para todo $s \in M^+$ y $v(m) = 1$.



Definición

Un juego $v \in MC^N$ se dice cero-normalizado si ningún jugador puede ganar algo jugando solo, es decir, $v(je^i) = 0$ para todo $i \in N$ y $j \in M_i$.

Notación y definiciones

► Definición

Un juego $v \in MC^N$ se llama simple si y sólo si $v(s) \in \{0, 1\}$ para todo $s \in M^+$ y $v(m) = 1$.

► Definición

Un juego $v \in MC^N$ se dice cero-normalizado si ningún jugador puede ganar algo jugando solo, es decir, $v(je^i) = 0$ para todo $i \in N$ y $j \in M_i$.

Notación y definiciones



Definición

Un juego $v \in MC^N$ es aditivo si y sólo si $v(s) = \sum_{i \in N} v(s_i e^i)$ para toda $s \in M$.



Definición

Dado un juego $v \in MC^N$, su cero-normalización es el juego $v_0 = v - a$, donde a es el juego aditivo tal que $a(je^i) = v(je^i)$.

Notación y definiciones

► Definición

Un juego $v \in MC^N$ es aditivo si y sólo si $v(s) = \sum_{i \in N} v(s_i e^i)$ para toda $s \in M$.



Definición

Dado un juego $v \in MC^N$, su cero-normalización es el juego $v_0 = v - a$, donde a es el juego aditivo tal que $a(je^i) = v(je^i)$.

Notación y definiciones

► Definición

Un juego $v \in MC^N$ es aditivo si y sólo si $v(s) = \sum_{i \in N} v(s_i e^i)$ para toda $s \in M$.



Definición

Dado un juego $v \in MC^N$, su cero-normalización es el juego $v_0 = v - a$, donde a es el juego aditivo tal que $a(je^i) = v(je^i)$.

Notación y definiciones

► Definición

Un juego $v \in MC^N$ es aditivo si y sólo si $v(s) = \sum_{i \in N} v(s_i e^i)$ para toda $s \in M$.

► Definición

Dado un juego $v \in MC^N$, su cero-normalización es el juego $v_0 = v - a$, donde a es el juego aditivo tal que $a(je^i) = v(je^i)$.

Imputaciones



Definición

Un vector de pago $x \in \mathbb{R}^P$, se dice

- (a) eficiente si y sólo si $x(m) = v(m)$.
- (b) racional en incrementos de nivel si y sólo si $x_{ij} \geq v(je^i) - v((j-1)e^i)$ para todo $i \in N$ y $j \in M_i^+$



Definición

El conjunto de imputaciones $I(v)$ de un juego v se define como el conjunto de vectores de pago eficientes y racionales en incrementos de nivel.

Imputaciones

► Definición

Un vector de pago $x \in \mathbb{R}^P$, se dice

- (a) eficiente si y sólo si $x(m) = v(m)$.
- (b) racional en incrementos de nivel si y sólo si $x_{ij} \geq v(je^i) - v((j-1)e^i)$ para todo $i \in N$ y $j \in M_i^+$



Definición

El conjunto de imputaciones $I(v)$ de un juego v se define como el conjunto de vectores de pago eficientes y racionales en incrementos de nivel.

Imputaciones

► Definición

Un vector de pago $x \in \mathbb{R}^P$, se dice

- (a) eficiente si y sólo si $x(m) = v(m)$.
- (b) racional en incrementos de nivel si y sólo si $x_{ij} \geq v(je^i) - v((j-1)e^i)$ para todo $i \in N$ y $j \in M_i^+$



Definición

El conjunto de imputaciones $I(v)$ de un juego v se define como el conjunto de vectores de pago eficientes y racionales en incrementos de nivel.

Imputaciones

► Definición

Un vector de pago $x \in \mathbb{R}^P$, se dice

- (a) eficiente si y sólo si $x(m) = v(m)$.
- (b) racional en incrementos de nivel si y sólo si $x_{ij} \geq v(je^i) - v((j-1)e^i)$ para todo $i \in N$ y $j \in M_i^+$



Definición

El conjunto de imputaciones $I(v)$ de un juego v se define como el conjunto de vectores de pago eficientes y racionales en incrementos de nivel.

Imputaciones

► Definición

Un vector de pago $x \in \mathbb{R}^P$, se dice

- (a) eficiente si y sólo si $x(m) = v(m)$.
- (b) racional en incrementos de nivel si y sólo si $x_{ij} \geq v(je^i) - v((j-1)e^i)$ para todo $i \in N$ y $j \in M_i^+$



Definición

El conjunto de imputaciones $I(v)$ de un juego v se define como el conjunto de vectores de pago eficientes y racionales en incrementos de nivel.

Imputaciones

► Definición

Un vector de pago $x \in \mathbb{R}^P$, se dice

- (a) eficiente si y sólo si $x(m) = v(m)$.
- (b) racional en incrementos de nivel si y sólo si
 $x_{ij} \geq v(je^i) - v((j-1)e^i)$ para todo $i \in N$ y $j \in M_i^+$

► Definición

El conjunto de imputaciones $I(v)$ de un juego v se define como el conjunto de vectores de pago eficientes y racionales en incrementos de nivel.

Núcleo



Definición

El núcleo $C(v)$ de un juego v se define como el conjunto de imputaciones tales que $x(s) \geq v(s)$, es decir,

$$C(v) = \{x \in I(v) \mid x(s) \geq v(s) \text{ para toda } s \in M\}$$



Definición

Sean $x, y \in I(v)$ y $s \in M$. Se dirá que y domina a x vía s si y sólo si $y(s) \leq v(s)$ y $y_i > x_i$ para toda $i \in \text{car}(s)$.



Definición

El d-núcleo $DC(v)$ de un juego v consiste de todas las imputaciones no dominadas.

Núcleo

► Definición

El núcleo $C(v)$ de un juego v se define como el conjunto de imputaciones tales que $x(s) \geq v(s)$, es decir,

$$C(v) = \{x \in I(v) \mid x(s) \geq v(s) \text{ para toda } s \in M\}$$



Definición

Sean $x, y \in I(v)$ y $s \in M$. Se dirá que y domina a x via s si y sólo si $y(s) \leq v(s)$ y $y_i > x_i$ para toda $i \in \text{car}(s)$.



Definición

El d-núcleo $DC(v)$ de un juego v consiste de todas las imputaciones no dominadas.

Núcleo

► Definición

El núcleo $C(v)$ de un juego v se define como el conjunto de imputaciones tales que $x(s) \geq v(s)$, es decir,

$$C(v) = \{x \in I(v) \mid x(s) \geq v(s) \text{ para toda } s \in M\}$$



Definición

Sean $x, y \in I(v)$ y $s \in M$. Se dirá que y domina x via s si y sólo si $y(s) \leq v(s)$ y $y_i > x_i$ para toda $i \in \text{car}(s)$.



Definición

El d-núcleo $DC(v)$ de un juego v consiste de todas las imputaciones no dominadas.

Núcleo

► Definición

El núcleo $C(v)$ de un juego v se define como el conjunto de imputaciones tales que $x(s) \geq v(s)$, es decir,

$$C(v) = \{x \in I(v) \mid x(s) \geq v(s) \text{ para toda } s \in M\}$$

► Definición

Sean $x, y \in I(v)$ y $s \in M$. Se dirá que y domina a x via s si y sólo si $y(s) \leq v(s)$ y $y_i > x_i$ para toda $i \in \text{car}(s)$.



Definición

El d-núcleo $DC(v)$ de un juego v consiste de todas las imputaciones no dominadas.

Núcleo

► Definición

El núcleo $C(v)$ de un juego v se define como el conjunto de imputaciones tales que $x(s) \geq v(s)$, es decir,

$$C(v) = \{x \in I(v) \mid x(s) \geq v(s) \text{ para toda } s \in M\}$$

► Definición

Sean $x, y \in I(v)$ y $s \in M$. Se dirá que y domina a x via s si y sólo si $y(s) \leq v(s)$ y $y_i > x_i$ para toda $i \in \text{car}(s)$.



Definición

El d-núcleo $DC(v)$ de un juego v consiste de todas las imputaciones no dominadas.

Núcleo

► Definición

El núcleo $C(v)$ de un juego v se define como el conjunto de imputaciones tales que $x(s) \geq v(s)$, es decir,

$$C(v) = \{x \in I(v) \mid x(s) \geq v(s) \text{ para toda } s \in M\}$$

► Definición

Sean $x, y \in I(v)$ y $s \in M$. Se dirá que y domina x via s si y sólo si $y(s) \leq v(s)$ y $y_i > x_i$ para toda $i \in \text{car}(s)$.

► Definición

El d-núcleo $DC(v)$ de un juego v consiste de todas las imputaciones no dominadas.

Núcleo



Teorema

Para todo $v \in MC^N$ se tiene que $C(v) \subseteq DC(v)$.



Teorema

Para todo $v \in MC^N$ con $C(v) \neq \emptyset$ se tiene que $C(v) = DC(v)$.



Teorema

Para todo $v \in MC^N$ se tiene que $C(v)$ y $DC(v)$ son convexos.

Núcleo

► Teorema

Para todo $v \in MC^N$ se tiene que $C(v) \subseteq DC(v)$.



Teorema

Para todo $v \in MC^N$ con $C(v) \neq \emptyset$ se tiene que $C(v) = DC(v)$.



Teorema

Para todo $v \in MC^N$ se tiene que $C(v)$ y $DC(v)$ son convexos.

Núcleo

► Teorema

Para todo $v \in MC^N$ se tiene que $C(v) \subseteq DC(v)$.



Teorema

Para todo $v \in MC^N$ con $C(v) \neq \emptyset$ se tiene que $C(v) = DC(v)$.



Teorema

Para todo $v \in MC^N$ se tiene que $C(v)$ y $DC(v)$ son convexos.

Núcleo

► Teorema

Para todo $v \in MC^N$ se tiene que $C(v) \subseteq DC(v)$.

► Teorema

Para todo $v \in MC^N$ con $C(v) \neq \emptyset$ se tiene que $C(v) = DC(v)$.



Teorema

Para todo $v \in MC^N$ se tiene que $C(v)$ y $DC(v)$ son convexos.

Núcleo

► Teorema

Para todo $v \in MC^N$ se tiene que $C(v) \subseteq DC(v)$.

► Teorema

Para todo $v \in MC^N$ con $C(v) \neq \emptyset$ se tiene que $C(v) = DC(v)$.



Teorema

Para todo $v \in MC^N$ se tiene que $C(v)$ y $DC(v)$ son convexos.

Núcleo

► Teorema

Para todo $v \in MC^N$ se tiene que $C(v) \subseteq DC(v)$.

► Teorema

Para todo $v \in MC^N$ con $C(v) \neq \emptyset$ se tiene que $C(v) = DC(v)$.

► Teorema

Para todo $v \in MC^N$ se tiene que $C(v)$ y $DC(v)$ son convexos.

Conjuntos estables



Definición

Un conjunto $K \subseteq I(v)$ se dice estable si y sólo si

- (a) Si $x, y \in K$ entonces x no domina a y .
- (b) Si $y \notin K$ entonces existe $x \in K$ tal que x domina a y .



Teorema

Se cumple que

- (a) *Todo conjunto estable contiene al d -núcleo.*
- (b) *Si el d -núcleo es conjunto estable entonces es el único conjunto estable.*

Conjuntos estables

► Definición

Un conjunto $K \subseteq I(v)$ se dice estable si y sólo si

- (a) Si $x, y \in K$ entonces x no domina a y .
- (b) Si $y \notin K$ entonces existe $x \in K$ tal que x domina a y .



Teorema

Se cumple que

- (a) *Todo conjunto estable contiene al d -núcleo.*
- (b) *Si el d -núcleo es conjunto estable entonces es el único conjunto estable.*

Conjuntos estables

► Definición

Un conjunto $K \subseteq I(v)$ se dice estable si y sólo si

- (a) Si $x, y \in K$ entonces x no domina a y .
- (b) Si $y \notin K$ entonces existe $x \in K$ tal que x domina a y .



Teorema

Se cumple que

- (a) *Todo conjunto estable contiene al d -núcleo.*
- (b) *Si el d -núcleo es conjunto estable entonces es el único conjunto estable.*

Conjuntos estables

► Definición

Un conjunto $K \subseteq I(v)$ se dice estable si y sólo si

- (a) Si $x, y \in K$ entonces x no domina a y .
- (b) Si $y \notin K$ entonces existe $x \in K$ tal que x domina a y .



Teorema

Se cumple que

- (a) *Todo conjunto estable contiene al d -núcleo.*
- (b) *Si el d -núcleo es conjunto estable entonces es el único conjunto estable.*

Conjuntos estables

► Definición

Un conjunto $K \subseteq I(v)$ se dice estable si y sólo si

- (a) Si $x, y \in K$ entonces x no domina a y .
- (b) Si $y \notin K$ entonces existe $x \in K$ tal que x domina a y .



Teorema

Se cumple que

- (a) *Todo conjunto estable contiene al d -núcleo.*
- (b) *Si el d -núcleo es conjunto estable entonces es el único conjunto estable.*

Conjuntos estables

► Definición

Un conjunto $K \subseteq I(v)$ se dice estable si y sólo si

- (a) Si $x, y \in K$ entonces x no domina a y .
- (b) Si $y \notin K$ entonces existe $x \in K$ tal que x domina a y .

► Teorema

Se cumple que

- (a) *Todo conjunto estable contiene al d -núcleo.*
- (b) *Si el d -núcleo es conjunto estable entonces es el único conjunto estable.*

Conjuntos estables

► Definición

Un conjunto $K \subseteq I(v)$ se dice estable si y sólo si

- (a) Si $x, y \in K$ entonces x no domina a y .
- (b) Si $y \notin K$ entonces existe $x \in K$ tal que x domina a y .

► Teorema

Se cumple que

- (a) *Todo conjunto estable contiene al d -núcleo.*
- (b) *Si el d -núcleo es conjunto estable entonces es el único conjunto estable.*

Conjuntos estables

► Definición

Un conjunto $K \subseteq I(v)$ se dice estable si y sólo si

- (a) Si $x, y \in K$ entonces x no domina a y .
- (b) Si $y \notin K$ entonces existe $x \in K$ tal que x domina a y .

► Teorema

Se cumple que

- (a) *Todo conjunto estable contiene al d -núcleo.*
- (b) *Si el d -núcleo es conjunto estable entonces es el único conjunto estable.*

Hsiao y Raghavan(1990)



$$m_i = m_j$$



Axioma

Dado $(w(0), \dots, w(m))$, si v es de la forma

$$v(y) = \begin{cases} c & \text{si } y \geq x \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$$

entonces $\phi_{i,x_i}(v)$ es proporcional a $w(x_i)$.

Hsiao y Raghavan(1990)



$$m_i = m_j$$



Axioma

Dado $(w(0), \dots, w(m))$, si v es de la forma

$$v(y) = \begin{cases} c & \text{si } y \geq x \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$$

entonces $\phi_{i,x_i}(v)$ es proporcional a $w(x_i)$.

Hsiao y Raghavan(1990)



$$m_i = m_j$$

► Axioma

Dado $(w(0), \dots, w(m))$, si v es de la forma

$$v(y) = \begin{cases} c & \text{si } y \geq x \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$$

entonces $\phi_{i,x_i}(v)$ es proporcional a $w(x_i)$.

Hsiao y Raghavan(1990)



Definición

El vector $x^* \in M$ es un portador (carrier) de v si $v(x^* \wedge x) = v(x)$ para todo $x \in M$.



Axioma

Si x^* es portador de v entonces $\sum_{i \in N} \sum_{j=1}^{x_i^*} \phi_{i,j}(v) = v(m)$.



Axioma

Aditividad



Axioma

Dado $x^0 \in M$, sea $v(x) = 0$ siempre que $x \not\leq x^0$, entonces $\phi_{i,k}(v) = 0$ para todo $k < x_i^0$, y todo $i \in N$.

Hsiao y Raghavan(1990)

► Definición

El vector $x^* \in M$ es un portador (carrier) de v si $v(x^* \wedge x) = v(x)$ para todo $x \in M$.



Axioma

Si x^ es portador de v entonces $\sum_{i \in N} \sum_{j=1}^{x_i^*} \phi_{i,j}(v) = v(m)$.*



Axioma

Aditividad



Axioma

Dado $x^0 \in M$, sea $v(x) = 0$ siempre que $x \not\geq x^0$, entonces $\phi_{i,k}(v) = 0$ para todo $k < x_i^0$, y todo $i \in N$.

Hsiao y Raghavan(1990)

► Definición

El vector $x^* \in M$ es un portador (carrier) de v si $v(x^* \wedge x) = v(x)$ para todo $x \in M$.



Axioma

Si x^* es portador de v entonces $\sum_{i \in N} \sum_{j=1}^{x_i^*} \phi_{i,j}(v) = v(m)$.



Axioma

Aditividad



Axioma

Dado $x^0 \in M$, sea $v(x) = 0$ siempre que $x \not\geq x^0$, entonces $\phi_{i,k}(v) = 0$ para todo $k < x_i^0$, y todo $i \in N$.

Hsiao y Raghavan(1990)

► Definición

El vector $x^* \in M$ es un portador (carrier) de v si $v(x^* \wedge x) = v(x)$ para todo $x \in M$.

► Axioma

Si x^* es portador de v entonces $\sum_{i \in N} \sum_{j=1}^{x_i^*} \phi_{i,j}(v) = v(m)$.



Axioma
Aditividad



Axioma

Dado $x^0 \in M$, sea $v(x) = 0$ siempre que $x \not\geq x^0$, entonces $\phi_{i,k}(v) = 0$ para todo $k < x_i^0$, y todo $i \in N$.

Hsiao y Raghavan(1990)

► Definición

El vector $x^* \in M$ es un portador (carrier) de v si $v(x^* \wedge x) = v(x)$ para todo $x \in M$.

► Axioma

Si x^* es portador de v entonces $\sum_{i \in N} \sum_{j=1}^{x_i^*} \phi_{i,j}(v) = v(m)$.



Axioma

Aditividad



Axioma

Dado $x^0 \in M$, sea $v(x) = 0$ siempre que $x \not\leq x^0$, entonces $\phi_{i,k}(v) = 0$ para todo $k < x_i^0$, y todo $i \in N$.

Hsiao y Raghavan(1990)

► Definición

El vector $x^* \in M$ es un portador (carrier) de v si $v(x^* \wedge x) = v(x)$ para todo $x \in M$.

► Axioma

Si x^* es portador de v entonces $\sum_{i \in N} \sum_{j=1}^{x_i^*} \phi_{i,j}(v) = v(m)$.

► Axioma

Aditividad



Axioma

Dado $x^0 \in M$, sea $v(x) = 0$ siempre que $x \not\geq x^0$, entonces $\phi_{i,k}(v) = 0$ para todo $k < x_i^0$, y todo $i \in N$.

Hsiao y Raghavan(1990)

► Definición

El vector $x^* \in M$ es un portador (carrier) de v si $v(x^* \wedge x) = v(x)$ para todo $x \in M$.

► Axioma

Si x^* es portador de v entonces $\sum_{i \in N} \sum_{j=1}^{x_i^*} \phi_{i,j}(v) = v(m)$.

► Axioma

Aditividad



Axioma

Dado $x^0 \in M$, sea $v(x) = 0$ siempre que $x \not\leq x^0$, entonces $\phi_{i,k}(v) = 0$ para todo $k < x_i^0$, y todo $i \in N$.

Hsiao y Raghavan(1990)

► Definición

El vector $x^* \in M$ es un portador (carrier) de v si $v(x^* \wedge x) = v(x)$ para todo $x \in M$.

► Axioma

Si x^* es portador de v entonces $\sum_{i \in N} \sum_{j=1}^{x_i^*} \phi_{i,j}(v) = v(m)$.

► Axioma

Aditividad

► Axioma

Dado $x^0 \in M$, sea $v(x) = 0$ siempre que $x \not\geq x^0$, entonces $\phi_{i,k}(v) = 0$ para todo $k < x_i^0$, y todo $i \in N$.

Hsiao y Raghavan(1990)

Teorema

Existe una única ϕ que satisface los cuatro axiomas anteriores. Además,

$$\phi_{j,i}(v) = \sum_{k=1}^i \sum_{x_j=k, x \neq 0, x \in M} \left[\sum_{T \subseteq M_j(x)} (-1)^t \frac{w(x_j)}{\sum_{r=1}^n w(x_r) + \sum_{r \in T} [w(x_r + 1) - w(x_r)]} \right. \\ \left. \times (v(x) - v(x - e^j)) \right].$$

Derks y Peters (1993)



Definición

Juegos de mínimo esfuerzo,

$$u_s(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t_i \geq s_i \text{ para toda } i \in N \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$$



$$v = \sum_{s \in M} \delta_s u_s$$



$$\delta_s = v(s) - \sum_{t \leq s, t \neq s} \delta_t$$



$$\Theta_{ij}(v) = \sum_{s \in M, s_i > s_j} \frac{\delta_s}{\sum_{k \in N} \delta_s}$$

Derks y Peters (1993)

► Definición

Juegos de mínimo esfuerzo,

$$u_s(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t_i \geq s_i \text{ para toda } i \in N \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$$



$$v = \sum_{s \in M} \delta_s u_s$$



$$\delta_s = v(s) - \sum_{t \leq s, t \neq s} \delta_t$$



$$\Theta_{ij}(v) = \sum_{s \in M, s_i > j} \frac{\delta_s}{\sum_{k \in N} s_k}$$

Derks y Peters (1993)

► Definición

Juegos de mínimo esfuerzo,

$$u_s(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t_i \geq s_i \text{ para toda } i \in N \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$$



$$v = \sum_{s \in M} \delta_s u_s$$



$$\delta_s = v(s) - \sum_{t \leq s, t \neq s} \delta_t$$



$$\Theta_{ij}(v) = \sum_{s \in M, s_i > j} \frac{\delta_s}{\sum_{k \in N} s_k}$$

Derks y Peters (1993)

► Definición

Juegos de mínimo esfuerzo,

$$u_s(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t_i \geq s_i \text{ para toda } i \in N \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$$



$$v = \sum_{s \in M} \delta_s u_s$$



$$\delta_s = v(s) - \sum_{t \leq s, t \neq s} \delta_t$$



$$\Theta_{ij}(v) = \sum_{s \in M, s_i \geq j} \frac{\delta_s}{\sum_{k \in N} s_k}$$

Derks y Peters (1993)

► Definición

Juegos de mínimo esfuerzo,

$$u_s(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t_i \geq s_i \text{ para toda } i \in N \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$$



$$v = \sum_{s \in M} \delta_s u_s$$



$$\delta_s = v(s) - \sum_{t \leq s, t \neq s} \delta_t$$



$$\Theta_{ij}(v) = \sum_{s \in M, s_i \geq j} \frac{\delta_s}{\sum_{k \in N} s_k}$$

van den Nouweland (1993)



Axioma

Eficiencia

$$\sum_{i \in N} \sum_{j=1}^{m_i} \varphi_{ij}(v) = v(m)$$

Axioma

Monotonía fuerte

Para todo $v, w \in MC$ tales que $v(s) - v(t) \geq w(s) - w(t)$ con $s_i = j$, $t_i = j - 1$ y $t_k = s_k$ para $k \neq i$, se tiene que

$$\varphi_{ij}(v) \geq \varphi_{ij}(w).$$

van den Nouweland (1993)

► Axioma

Eficiencia

$$\sum_{i \in N} \sum_{j=1}^{m_i} \varphi_{ij}(v) = v(m)$$

Axioma

Monotonía fuerte

Para todo $v, w \in MC$ tales que $v(s) - v(t) \geq w(s) - w(t)$ con $s_i = j$, $t_i = j - 1$ y $t_k = s_k$ para $k \neq i$, se tiene que

$$\varphi_{ij}(v) \geq \varphi_{ij}(w).$$

van den Nouweland (1993)

► Axioma

Eficiencia

$$\sum_{i \in N} \sum_{j=1}^{m_i} \varphi_{ij}(v) = v(m)$$

Axioma

Monotonía fuerte

Para todo $v, w \in MC$ tales que $v(s) - v(t) \geq w(s) - w(t)$ con $s_i = j$, $t_i = j - 1$ y $t_k = s_k$ para $k \neq i$, se tiene que

$$\varphi_{ij}(v) \geq \varphi_{ij}(w).$$

van den Nouweland (1993)



Definición

$j \in M_i^+$ es un nivel vetador si $v(s) = 0$ para todo $s \in M$ tal que $s_i \leq j$.



Axioma

Nivel vetador

$$\varphi_{i j_1}(v) = \varphi_{i j_2}(v)$$

para todo par de niveles vetador $j_1 \in M_i^+$ y $j_2 \in M_i^+$.



Teorema

Una solución φ satisface eficiencia, monotonía fuerte y nivel vetador si y sólo si $\varphi = \Theta$.

van den Nouweland (1993)

► Definición

$j \in M_i^+$ es un nivel vetador si $v(s) = 0$ para todo $s \in M$ tal que $s_i \leq j$.



Axioma

Nivel vetador

$$\varphi_{ij_1}(v) = \varphi_{ij_2}(v)$$

para todo par de niveles vetador $j_1 \in M_i^+$ y $j_2 \in M_i^+$.



Teorema

Una solución φ satisface eficiencia, monotonía fuerte y nivel vetador si y sólo si $\varphi = \Theta$.

van den Nouweland (1993)

► Definición

$j \in M_i^+$ es un nivel vetador si $v(s) = 0$ para todo $s \in M$ tal que $s_i \leq j$.



Axioma

Nivel vetador

$$\varphi_{i_1 j_1}(v) = \varphi_{i_2 j_2}(v)$$

para todo par de niveles vetador $j_1 \in M_{i_1}^+$ y $j_2 \in M_{i_2}^+$.



Teorema

Una solución φ satisface eficiencia, monotonía fuerte y nivel vetador si y sólo si $\varphi = \Theta$.

van den Nouweland (1993)

► Definición

$j \in M_i^+$ es un nivel vetador si $v(s) = 0$ para todo $s \in M$ tal que $s_i \leq j$.

► Axioma

Nivel vetador

$$\varphi_{i_1 j_1}(v) = \varphi_{i_2 j_2}(v)$$

para todo par de niveles vetador $j_1 \in M_{i_1}^+$ y $j_2 \in M_{i_2}^+$.



Teorema

Una solución φ satisface eficiencia, monotonía fuerte y nivel vetador si y sólo si $\varphi = \Theta$.

van den Nouweland (1993)

► Definición

$j \in M_i^+$ es un nivel vetador si $v(s) = 0$ para todo $s \in M$ tal que $s_i \leq j$.

► Axioma

Nivel vetador

$$\varphi_{i_1 j_1}(v) = \varphi_{i_2 j_2}(v)$$

para todo par de niveles vetador $j_1 \in M_{i_1}^+$ y $j_2 \in M_{i_2}^+$.



Teorema

Una solución φ satisface eficiencia, monotonía fuerte y nivel vetador si y sólo si $\varphi = \Theta$.

van den Nouweland (1993)

► Definición

$j \in M_i^+$ es un nivel vetador si $v(s) = 0$ para todo $s \in M$ tal que $s_i \leq j$.

► Axioma

Nivel vetador

$$\varphi_{i_1 j_1}(v) = \varphi_{i_2 j_2}(v)$$

para todo par de niveles vetador $j_1 \in M_{i_1}^+$ y $j_2 \in M_{i_2}^+$.

► Teorema

Una solución φ satisface eficiencia, monotonía fuerte y nivel vetador si y sólo si $\varphi = \Theta$.

Klijn, Slikker y Zarzuelo (1999)



Definición

$j \in M_i^+$ es un nivel nulo si $v(s) = 0$ para todo $s \in M$ tal que $s_i < j$.



Teorema

Una solución φ satisface eficiencia, aditividad, nivel vetador y nulidad si y sólo si $\varphi = \Theta$.

Klijn, Slikker y Zarzuelo (1999)

► Definición

$j \in M_i^+$ es un nivel nulo si $v(s) = 0$ para todo $s \in M$ tal que $s_i < j$.



Teorema

Una solución φ satisface eficiencia, aditividad, nivel vetador y nulidad si y sólo si $\varphi = \Theta$.

Klijn, Slikker y Zarzuelo (1999)

► Definición

$j \in M_i^+$ es un nivel nulo si $v(s) = 0$ para todo $s \in M$ tal que $s_i < j$.



Teorema

Una solución φ satisface eficiencia, aditividad, nivel vetador y nulidad si y sólo si $\varphi = \Theta$.

Klijn, Slikker y Zarzuelo (1999)






► Definición

$j \in M_i^+$ es un nivel nulo si $v(s) = 0$ para todo $s \in M$ tal que $s_i < j$.

► Teorema

Una solución φ satisface eficiencia, aditividad, nivel vetador y nulidad si y sólo si $\varphi = \Theta$.

Referencias

-  Branzei R., Dimitrov D. y Tijs S. (2005). *Models in Cooperative Game Theory*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
-  Hsiao C. R. y Raghavan T.E. (1990). Shapley value for Multi-Choice Cooperative Games, *Journal of Game Theory and Economic Behavior*.
-  Hsiao C. R. y Raghavan T.E. (1992) Monotonicity and dummy free property for multi-choice cooperative games, *International Journal of Game Theory* 21:301-312.
-  Klijn F., Slikker M. y Zarzuelo J. (1999). Characterizations of a multi-choice value, *International Journal of Game Theory* 28, pp.521-532.
-  Nouweland A van den (1993) Games and graphs in economic situations. *PhD Dissertation*, Tilburg University, Tilburg, The Netherlands.